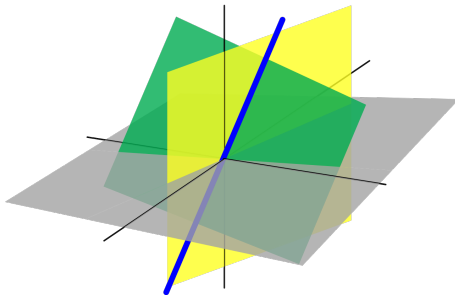


ALGÈBRE LINÉAIRE

COURS DU 10 OCTOBRE

Jérôme Scherer



3.2.1 DÉTERMINANT ET OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

THÉORÈME

- a Une opération élémentaire de type I ne change pas le déterminant ;
- b Une opération élémentaire de type II change le signe du déterminant ;
- c Une opération élémentaire de type III (multiplier une ligne par un nombre réel α) multiplie le déterminant par α .

Preuve. Elle se fait par récurrence, on commence donc par le cas des matrices 2×2 . Comme opération de type I, prenons $L_2 + \lambda L_1$:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \lambda a & d + \lambda b \end{pmatrix} \stackrel{\text{def.}}{=} a(d + \lambda b) - b(c + \lambda a) \stackrel{\text{distr.}}{=} ad + \lambda ab - bc - \lambda ba = ad - bc$$

SUITE. Pour $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\det(E_{21}(\lambda) \cdot A) = \det A$.

type II: $\det(E_{12} \cdot A) = \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = c \cdot b - a \cdot d$
 $= -\det A$.

type III: $\det(E_1(\alpha) \cdot A) = \det \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha ad - c \cdot \alpha b$
 $\stackrel{\text{distr.}}{=} \alpha(ad - bc) = \alpha \cdot \det A$.

La récurrence est initialisée, on suppose le résultat vrai pour les matrices de taille $\leq n$ et on passe au cas où $A \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (n+1)}(\mathbb{R})$. Ici $n \geq 2$, $n+1 \geq 3$

Comme une opération élémentaire fait intervenir au plus deux lignes, il existe une ligne L_i qui ne change pas. On développe $\det(E \cdot A)^{(*)}$ selon L_i et on obtient la même formule que $\det A$, où les

(*) où E est la matrice d'une opération élémentaire

SUITE.

sous-déterminants $\det A_{ij}$ ont été
remplacés par $\det E' \cdot A_{ij}$ où E' est la
matrice qui correspond à la même opération
élémentaire que E .

Par hypothèse de récurrence tous ces $\det(E' \cdot A_{ij})$
sont

$$\begin{aligned} &= \det A_{ij} && \text{dans le cas (I)} \\ &= -\det A_{ij} && \text{(II)} \\ &= \alpha \cdot \det A_{ij} && \text{(III)} \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition. $\square$

Ex: $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$, on échange les lignes 1 & 2

$$\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \stackrel{\text{dév.}}{=} \underset{L_3}{a_{31}} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \text{red} \end{matrix}$$

$$- a_{32} \cdot \det \dots + a_{33} \dots = - a_{31} \cdot \det A_{31} + a_{32} \det A_{32} \\ - a_{33} \det A_{33} + a_{34} \det A_{34}$$

3.2.1 NOTATION ET EXEMPLE

NOTATION.

On écrit parfois $\det A = |A|$.

Exemple 1. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vaut -1 puisqu'on retrouve I_3 en échangeant les lignes 1 et 2.

Exemple 2. Le déterminant

5	4	4	1	$C_1 - C_3$ = $C_4 + C_3$	1	4	4	5	$C_3 = 2 \cdot C_3'$ = $2 \cdot C_3'$
2	3	2	-2		0	3	2	0	
-5	-7	-6	9		1	-7	-6	3	
1	-2	-2	4		3	-2	-2	2	

SUITE.

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 - 3C_3} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

dévelop. selon L_2

$$= 2 \cdot [0 \cdot \det A_{21} + 0 \cdot \det A_{22} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \det A_{24}]$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - 3L_1}} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix}$$

dévelop. C_1

$$= -2 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot [-52 + 14] = \underline{\underline{76}}$$

-38

3.2.2 PROPRIÉTÉS DU DÉTERMINANT

PROPOSITION

Soit A une matrice de taille $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A.$$

preuve. $\lambda \cdot A$ est obtenu de A en effectuant n opérations élémentaires de type III (sur chaque des lignes). $\square$

REMARQUE

Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes, alors

$\det A = 0$. En particulier si une ligne est nulle, $\det A = 0$.

preuve: Des opérations de type I transforment A en une matrice qui a une ligne de zéros. Le développement du $\det$ selon cette ligne donne 0. $\square$

3.2.2 CRITÈRE D'INVERSIBILITÉ

THÉORÈME

Une matrice carrée est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

preuve. Une matrice carrée est inversible $n \times n$ sss elle a n pivots sss il existe des opérations élémentaires qui transforment A en une matrice échelonnée avec des pivots, non nuls, sur la diagonale. le déterminant de cette matrice est le produit des termes de la diagonale et il est non nul, donc $\det A \neq 0$. $\square$

Rem: Le déterminant a peut être changé de signe ou être multiplié par $\alpha \neq 0$, mais il reste $\neq 0$.

3.2.3 DÉTERMINANT D'UN PRODUIT

THÉORÈME

$$\det(A^T) = \det A$$

Preuve. Le développement du déterminant de A selon la première ligne est identique au développement du déterminant de sa transposée selon la première colonne. □

THÉORÈME

Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

3.2.4 DÉMONSTRATION

La preuve se fait en deux parties, selon que la matrice A est inversible ou non.

- ❶ Supposons que A soit inversible. Alors nous savons que A peut s'écrire comme produit de matrices élémentaires. La preuve se fait par induction sur le nombre de matrices élémentaires.

Pour initialiser l'induction on doit traiter le cas où A est une matrice élémentaire. Il y a donc trois sous-cas.

- (I) $A = E_{ij}(\lambda)$ est de type I. Comme elle est triangulaire et que sa diagonale est constituée de 1, on a $\det E_{ij}(\lambda) = 1$. Il faut encore calculer $\det(E_{ij}(\lambda)B)$.

type I

SUITE. $\det(E_{ij}(\lambda) \cdot B) \stackrel{\text{type I}}{=} \det B = \det(E_{ij}(\lambda)) \cdot \det B.$

(II) $A = E_{ij}$, $\det E_{ij} = -1$ car c'est I_n avec L_i et L_j échangées.

$\det(E_{ij} \cdot B) \stackrel{\text{type II}}{=} -\det B = -1 \cdot \det B = \det E_{ij} \cdot \det B.$

(III) $A = E_i(\lambda)$, $\det E_i(\lambda) = \lambda$ (diagonale)

$\det(E_i(\lambda) \cdot B) \stackrel{\text{type III}}{=} \lambda \cdot \det B = \det E_i(\lambda) \cdot \det B.$

3.2.3 DÉMONSTRATION, SUITE

La récurrence est maintenant initialisée.

Hypothèse de récurrence. Supposons que

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

pour toutes les matrices A qui sont produits d'au plus n matrices élémentaires.

Pas de récurrence. Considérons une matrice $A = E_{n+1} \cdot E_n \cdots E_1$ qui est un produit de $n + 1$ matrices élémentaires. Nous devons montrer que

$$\det(E_{n+1} \cdot E_n \cdots E_1 \cdot B) = \det(E_{n+1} \cdot E_n \cdots E_1) \cdot \det B$$

FIN. $\det(E_{n+1} \cdot \underbrace{E_n \cdots E_1}_C \cdot B) \stackrel{n=1}{=} \det(E_{n+1}) \cdot \det C$

$$= \det(E_{n+1}) \cdot \det(E_n \cdots E_1 \cdot B) \stackrel{r \in C.}{=}$$

$$= \det(E_{n+1}) \cdot \det(E_n \cdots E_1) \cdot \det(B) =$$

$$\underbrace{\det(E_{n+1} E_n \cdots E_1)}_{n=1}$$

$$= \det(E_{n+1} \cdots E_1) \cdot \det B.$$

2^e cas: A non inversible. Alors par le Théorème précédent $\det A = 0$. Donc $\det(A) \cdot \det(B) = 0$.

On montre que $A \cdot B$ n'est pas inversible si bien que $\det(A \cdot B) = 0$. Si $A \cdot B$ était inversible, il existerait C tq $(A \cdot B) \cdot C = I_n \stackrel{\text{ass.}}{=} A \cdot (B \cdot C) = I_n$ mais A n'est pas inversible, contradiction $\swarrow \quad \square$

3.2.4 DÉTERMINANT, INVERSE, PRODUIT

COROLLAIRE

Si A est inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

preuve: $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$\det A \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

□

REMARQUE SUR LA COMMUTATIVITÉ

Même si en général $AB \neq BA$ on a toujours $\det(AB) = \det(BA)$

car les deux déterminants donnent $\det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A$

• $\uparrow$
commutatif dans $\mathbb{R}$.

3.2.5 LINÉARITÉ DU DÉTERMINANT ?

CONTRE-EXEMPLE

$\det(A + B) \neq \det A + \det B$. Le déterminant n'est pas linéaire comme application $\det : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

$$1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Mais, fixons une matrice $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$. Soit T l'application qui fait correspondre à tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$ le déterminant

$$\det(\vec{a}_1 \dots \vec{a}_{j-1} \vec{x} \vec{a}_{j+1} \dots \vec{a}_n)$$

THÉORÈME (LINÉARITÉ DU DÉTERMINANT COMME FONCTION D'UNE COLONNE)

L'application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

3.2.5 DÉMONSTRATION

SLOGAN

Le déterminant est linéaire comme fonction d'une de ses colonnes.

Nous devons vérifier trois points.

- 1 $T(\vec{0}) = 0$ car c'est le déterminant d'une matrice ayant une colonne nulle.
- 2 $T(\lambda \vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$ car il s'agit d'une opération de type III sur la j -ème colonne.
- 3 $T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ se prouve en développant le déterminant selon la j -ème colonne.

PREUVE. $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Alors $T(\vec{x} + \vec{y})$ j=1

$$= \begin{vmatrix} x_1+y_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2+y_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3+y_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{dév.} \\ \\ C_1 \end{matrix} = (x_1+y_1) \det A_{11}$$

$$- (x_2+y_2) \det A_{21} + (x_3+y_3) \det A_{31}$$

distrib.
= &
comm det

$$= x_1 \cdot \det A_{11} - x_2 \det A_{21} + x_3 \cdot \det A_{31} \\ + y_1 \cdot \det A_{11} - y_2 \cdot \det A_{21} + y_3 \cdot \det A_{31}$$

$$\begin{matrix} \text{dév.} \\ C_1 \end{matrix} = T(\vec{x}) + T(\vec{y}).$$

□

3.3.1 RÈGLES DE CRAMER (GENÈVE, 1704-1752)



En 1724 Cramer n'obtient pas la chaire de philosophie convoitée, mais un poste à mi-temps grâce auquel il peut voyager : Bâle (Jean Bernoulli), Oxford.

Si $\det A = ad - bc \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a une solution unique (matrice inversible).

3.3.1 CRAMER, LE CAS $n = 2$

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad \text{Posons } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

La solution du système est $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc} = \det \begin{pmatrix} e & b \\ f & d \end{pmatrix} / \det A$$

$$y = \frac{af - ec}{ad - bc} = \det \begin{pmatrix} a & e \\ c & f \end{pmatrix} / \det A$$

3.3.2 LES FORMULES DE CRAMER

Soit A une matrice $n \times n$ **inversible**. Pour tout vecteur $\vec{b}$ on pose

$$A_i(\vec{b}) = \left(\vec{a}_1 \quad \dots \quad \vec{a}_{i-1} \quad \vec{b} \quad \vec{a}_{i+1} \quad \dots \quad \vec{a}_n \right)$$

THÉORÈME

La seule solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ est donnée par la formule

$$x_i = \frac{\det A_i(\vec{b})}{\det A}$$

PREUVE. A étant inversible, la solution unique est

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$$

$$\text{Soit } B_i = (I_n)_i(\vec{b}) = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_{i-1} \vec{b} \vec{e}_{i+1} \dots \vec{e}_n)$$

$$\det B_i = b_i \quad \text{en dév. selon } L_i$$